

مؤلف درس، تست‌های طراحی شده و تنظیم تست‌های این کتاب: فرهاد حامی

صفحه‌های ۴ تا ۲۴ و تمرین صفحه‌ی ۶ کتاب درسی

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

۱. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n

اگر بخواهیم مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را که با S_n نمایش می‌دهیم محاسبه کنیم، کافی است این مجموع را یک بار از اول به آخر و بار دیگر از آخر به اول نوشته و با هم جمع کنیم.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ + S_n &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ مرتبه}} \\ \Rightarrow 2S_n &= n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

به فرمول‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} (1) \quad 1+2+3+\dots+n &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا } n \\ (2) \quad 1+3+5+\dots+(2n-1) &= n^2 && \text{مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی از ۱ تا } 2n-1 \\ (3) \quad 2+4+6+\dots+2n &= n(n+1) && \text{مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا } 2n \end{aligned}$$

■ مثال: حاصل $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ را بیابید.

◀ حل: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned} S &= \underbrace{10^2 - 9^2} + \underbrace{8^2 - 7^2} + \dots + \underbrace{2^2 - 1^2} = \underbrace{(10-9)(10+9)} + \underbrace{(8-7)(8+7)} + \dots + \underbrace{(2-1)(2+1)} \\ \Rightarrow S &= 10+9+8+7+\dots+2+1 \xrightarrow{\text{مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰}} S = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \end{aligned}$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

■ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی ◀ همانند روشی که در تعیین مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n بکار بردیم، می‌توانیم مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را بیابیم.

در یک دنباله‌ی حسابی، با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d و جمله‌ی عمومی a_n ، مجموع n جمله‌ی اول با S_n نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

مجموع این جملات از رابطه‌های زیر به دست می‌آید.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (2)$$

یادآوری ◀ در دنباله‌ی حسابی، با در اختیار بودن جمله‌ی عمومی یا خود دنباله، قدر نسبت برابر $d = a_2 - a_1$ است و به طور کلی:

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad a_n - a_m = (n-m)d$$

■ مثال: مجموع ۴۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی ...، ۱۵، ۱۱، ۷، ۳ را بیابید.

◀ حل: جمله‌ی اول دنباله $a_1 = 3$ و قدر نسبت $d = 7 - 3 = 4$ است، بنابراین وقتی $n = 40$ است، در رابطه‌ی (۱)، S_{40} را می‌یابیم:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \times 3 + (40-1) \times 4) = 20(6 + 156) = 3240$$

■ مثال: چند جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی ...، ۹، ۷، ۵ را با هم جمع کنیم تا حاصل مجموع ۵۷۲ باشد؟

◀ حل: در سؤال از ما خواسته شده n را بیابیم که در آن $S_n = 572$ باشد. از آنجایی که $a_1 = 5$ و $d = 7 - 5 = 2$ ، پس با استفاده از فرمول

$$572 = \frac{n}{2}(2 \times 5 + (n-1) \times 2) \Rightarrow n(n+4) = 572$$

(۱) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow n^2 + 4n - 572 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (n-22)(n+26) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 22$$

■ مثال: مجموع همه‌ی عددهای دو رقمی و مضرب ۵ را بیابید.

◀ حل: اولین عدد دو رقمی و مضرب ۵، برابر $a_1 = 10$ و آخرین عدد $a_n = 95$ است. تعداد این اعداد را به صورت زیر می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{\substack{a_n=95 \\ a_1=10}} 95 = 10 + (n-1) \times 5 \Rightarrow n = 18$$

بنابراین مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۵ برابر است با:

$$S_{18} = \frac{18}{2} (2 \times 10 + (18-1) \times 5) = 945$$

تذکر ۱۱ می‌توان نشان داد که مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم بر حسب n ، به شکل $S_n = an^2 + bn$ است. در این صورت قدر نسبت برابر $d = 2a$ (دو برابر ضریب n^2) و جمله‌ی اول برابر $a_1 = S_1$ است.

■ مثال: اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = 3n^2 - 2n$ به دست آید، آنگاه جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را بیابید.

◀ حل: به ازای $n = 1$ در رابطه، جمله‌ی اول برابر $S_1 = a_1 = 3 - 2 = 1$ است. همچنین قدر نسبت برابر $d = 2 \times 3 = 6$ است.

■ رابطه‌ی بین S_n و S_{n-1} با a_n ◀ اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی داده شده باشد، آنگاه جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \xrightarrow{\text{تفاضل}} S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

توجه کنید که با در اختیار بودن a_n می‌توانیم جمله‌ی اول، قدر نسبت یا هر جمله‌ای از دنباله را بیابیم.

■ مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n = \frac{n^2}{3}$ به دست می‌آید. جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{3} - \frac{(n-1)^2}{3} = \frac{1}{3} \underbrace{(n^2 - (n-1)^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{1}{3} (n - (n-1))(n + (n-1)) = \frac{1}{3} (2n - 1)$$

◀ حل:

$$a_n = \frac{1}{3} (2n - 1)$$

تذکر ۱۲ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات، شروع از جمله‌ی m ام و ختم به جمله‌ی n ام برابر است با:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = S_n - S_{m-1}$$

صفحه‌های ۲ و ۳ و تمرین صفحه‌ی ۶ کتاب درسی

مجموع اعداد طبیعی از n تا n

- ۱- جواب معادله‌ی $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{15} n^2$ کدام است؟
- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| (۱) ۱۲ | (۲) ۱۵ | (۳) ۱۳ | (۴) ۱۸ |
|--------|--------|--------|--------|
- ۲- جواب معادله‌ی $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{115}{116}$ ، کدام است؟
- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| (۱) ۱۱۰ | (۲) ۱۱۵ | (۳) ۱۱۶ | (۴) ۲۳۱ |
|---------|---------|---------|---------|
- ۳- مجموع همه‌ی اعداد موجود در جدول ضرب 10×10 چقدر است؟
- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (۱) ۵۰۵۰ | (۲) ۵۵۰۰ | (۳) ۳۰۲۵ | (۴) ۶۰۵۰ |
|----------|----------|----------|----------|
- ۴- اگر $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ و n کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی باشد که $S > 10^6$ ، آنگاه مجموع رقم‌های n برابر است با:
- | | | | |
|--------|-------|--------|-------|
| (۱) ۲۷ | (۲) ۱ | (۳) ۱۲ | (۴) ۶ |
|--------|-------|--------|-------|
- ۵- اگر $S_1 = 5^2 + 48^2 + 46^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ و $S_2 = 49^2 + 47^2 + \dots + 3^2 + 1^2$ ، در این صورت $S_1 - S_2$ کدام است؟
- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (۱) ۱۲۲۵ | (۲) ۱۷۲۵ | (۳) ۱۲۷۵ | (۴) ۱۲۵۷ |
|----------|----------|----------|----------|
- (صفحه‌ی ۲-فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (آزمون کانون ریاضی- ۹۱)

۶- بر محیط دایره‌ای ۳۱ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز کدام است؟

(صفحه ۳- مشابه مثال)

۴۸۰ (۱) ۴۶۵ (۲) ۹۶۱ (۳) ۹۰۰ (۴)

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی صفحه‌های ۳ و ۴ و تمرین صفحه‌ی ۶ کتاب درسی

۷- اعداد $\dots, \frac{5}{2}, y, x, 1$ ، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(صفحه ۳- مشابه مثال) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

۵۷ (۱) ۶۲/۵ (۲) ۶۷/۵ (۳) ۶۸ (۴)

۸- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟

(صفحه ۳- مکمل مثال) و (سراسری تجربی - ۸۲)

۲۲/۵ (۱) ۲۵ (۲) ۲۷/۵ (۳) ۳۰ (۴)

۹- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n ، جمله‌ی اول دو برابر جمله‌ی دوم و $a_n = a_{n+2} + 4$ ، مجموع ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(صفحه ۳- مکمل مثال) و (آزمون کانون ریاضی - ۹۰)

-۴۰ (۱) -۵۰ (۲) -۷۰ (۳) -۹۰ (۴)

۱۰- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این دنباله، کدام است؟

(صفحه ۴- کار در کلاس- مکمل تمرین ۱) و (سراسری تجربی - ۸۹)

۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

۱۱- جملات چهارم و شانزدهم از یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱ و ۲۵ است. مجموع ده جمله‌ی اول آن کدام است؟

(صفحه ۳- مکمل مثال) و (سراسری ریاضی - ۷۷)

۳۰ (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴)

۱۲- مجموع هشت جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی برابر ۲ و جمله‌ی یازدهم آن برابر ۱۰ می‌باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(صفحه ۳- فعالیت- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی - ۷۹)

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

۱۳- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟

(صفحه ۳- مکمل مثال) و (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱۶۰ (۱) ۱۷۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۹۰ (۴)

۱۴- بین دو عدد ۸ و ۶۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و تفاضل کوچکترین و بزرگترین آنها ۳۳ است. مجموع کل جملات دنباله کدام است؟

(صفحه ۴- کار در کلاس- مکمل تمرین ۱) و (آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

۱۴۲ (۱) ۲۱۳ (۲) ۲۸۴ (۳) ۳۷۵ (۴)

۱۵- در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ ، جمله‌ی عمومی آن کدام است؟

(صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱)

$a_n = 4n - 3$ (۱) $a_n = 5n - 6$ (۲) $a_n = 4n - 5$ (۳) $a_n = 6n - 7$ (۴)

۱۶- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{n(9n-5)}{12}$ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی - ۷۶)

$\frac{5}{4}$ (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۱۷- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

(صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

۹ (۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸ (۴)

۱۸- در یک دنباله حسابی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این دنباله، صفر است؟

(صفحه‌ی ۶ - مکمل تمرین ۱) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۱۹- در دنباله‌ی حسابی ... و ۲۱ و x و ۲۷، مجموع جملات منفی کدام است؟

(صفحه‌ی ۶ - مکمل تمرین ۱) و (آزاد ریاضی صبح - ۸۷)

- (۱) -۱۳۵ (۲) -۱۵۰ (۳) -۷۵ (۴) -۲۷۰

۲۰- در دنباله‌ی حسابی ...، ۱۱، ۸، ۵، حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

(صفحه‌ی ۶ - مشابه تمرین ۱)

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

۲۱- مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟

(صفحه‌ی ۴ - مکمل تمرین ۲) و (سراسری تجربی - ۸۱)

- (۱) ۲۴۲۰ (۲) ۲۴۵۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۵۵۰

۲۲- مجموع اعداد طبیعی دو رقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۱ باشد، کدام است؟

(صفحه‌ی ۶ - مشابه تمرین ۲)

- (۱) ۱۴۵۲ (۲) ۱۱۳۲ (۳) ۱۳۵۲ (۴) ۱۲۱۰

۲۳- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: ... (۹، ۸، ۷، ۶، ۵)، (۴، ۳، ۲)، (۱)

(صفحه‌ی ۴ - کار در کلاس - مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

- (۱) ۱۶۹۱ (۲) ۱۷۱۰ (۳) ۱۷۲۹ (۴) ۱۷۴۸

۲۴- در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جمله‌ی اول کدام

(صفحه‌ی ۶ - تمرین ۴) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع بیست جمله‌ی اول، سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی

(صفحه‌ی ۳ - مرتبط با مثال) و (سراسری ریاضی - ۹۰)

دهم کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۲۶- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟

(صفحه‌ی ۳ - فعالیت - مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

مسائل کاربردی صفحه‌ی ۴ کتاب درسی

۲۷- یک سالن تئاتر در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و ردیف سوم ۲۱ صندلی و به همین ترتیب تعداد صندلی‌ها در هر ردیف

(صفحه‌ی ۴ - مشابه مثال)

افزایش می‌یابد. اگر این سالن ۸۷۰ صندلی داشته باشد، تعداد ردیف‌های آن چند تاست؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۹ (۴) ۱۷

۲۸- چند نفر پذیرفته‌اند کاری را انجام دهند. اگر این چند نفر، با هم کار را آغاز می‌کردند، می‌توانستند بعد از ۲۴ ساعت کار را تمام کنند ولی در

آغاز، تنها یک نفر شروع به کار کرد و در فاصله‌ی زمان‌های برابر یکی یکی به او اضافه شدند یعنی دومی مدتی دیرتر از اولی، سومی به

همان اندازه دیرتر از دومی، اگر زمان کار اولی ۱۱ برابر زمان کار آخری باشد، نفر آخر چند ساعت کار کرده است؟

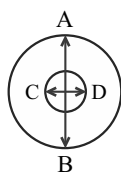
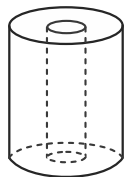
(صفحه‌ی ۴ - مکمل مثال)

- (۱) ۴ (۲) ۴۴ (۳) ۲۴ (۴) ۱۴

۲۹- کارخانه‌ای برای ساختن یک دستمال لوله‌ای کاغذی از کاغذی با ضخامت $\frac{5}{100}$ میلی‌متر استفاده می‌کند. اگر قطر خارجی لوله ۴ سانتی‌متر و

قطر خارجی دستمال کاغذی ۱۰ سانتی‌متر باشد، این کارخانه از چند سانتی‌متر کاغذ برای تهیه‌ی این دستمال کاغذی استفاده می‌کند؟

(صفحه‌ی ۴ - مکمل مثال)



- (۱) 223π
 (۲) 423π
 (۳) 523π
 (۴) 623π

■ **مجموع جملات دنباله‌ی هندسی** ◀ دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مجموع n جمله‌ی اول این دنباله را که با S_n نمایش می‌دهیم، پیدا کنیم. جملات این دنباله به صورت مقابل است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$$

که در آن $a_n = a_1q^{n-1}$. مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

$$(1) S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$(2) qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱) در $q \neq 1$ داریم:

$$(1) - (2) : S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow (1-q)S_n = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$$

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q ، مجموع n جمله‌ی اول با S_n نمایش داده می‌شود:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

این مجموع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$$

■ **مثال:** مجموع چند جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی ...، ۳۲، -۱۶، ۸ برابر ۱۳۶۸ است؟

◀ **حل:** در دنباله‌ی داده شده، جمله‌ی اول $a_1 = ۸$ و قدر نسبت $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-۱۶}{۸} = -۲$ است. با توجه به اینکه $S_n = ۱۳۶۸$ است، پس:

$$S_n = \frac{۸(1-(-۲)^n)}{1-(-۲)} = ۱۳۶۸ \Rightarrow ۸(1-(-۲)^n) = ۱۳۶۸ \times ۳ \Rightarrow ۱-(-۲)^n = ۵۱۳ \Rightarrow (-۲)^n = -۵۱۲ = (-۲)^9 \Rightarrow n = ۹$$

■ **مثال:** حاصل عبارت $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^9$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ بیابید.

◀ **حل:** مجموع داده شده، یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_1 = x$ و قدر نسبت $q = \frac{x^2}{x} = x$ است و تعداد جملات ۱۰ تاست، پس:

$$S_{10} = \frac{x(1-x^{10})}{1-x} = \frac{\sqrt{2}(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-۲^5)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-۳۱\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

تذکره ◀◀ تعدادی از اتحادهای جبری، مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی هستند و می‌توانیم به کمک فرمول مجموع، آن‌ها را بیابیم.

■ **مثال:** با محاسبه‌ی $S = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1$ به کمک مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نشان دهید:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

◀ **حل:** با ضرب طرفین تساوی داده شد در a خواهیم داشت:

$$\begin{cases} aS = a^n + a^{n-1} + \dots + a \\ S = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 \end{cases} \xrightarrow{aS-S} aS - S = a^n - 1 \Rightarrow S = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1 \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(1) a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \quad (n \text{ عدد طبیعی})$$

$$(2) a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1) \quad (n \text{ عدد طبیعی و فرد})$$

■ **رابطه‌ی بین S_n و S_{2n}** ◀ در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q ، رابطه‌ی بین S_{2n} (مجموع $2n$ جمله‌ی اول) و S_n

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

(مجموع n جمله‌ی اول) دنباله به صورت مقابل است:

■ **مثال:** در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۲، مجموع شش جمله‌ی اول چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 1 + 2^3 = 9 \Rightarrow S_6 = 9S_3$$

◀ **حل:**

صفحه‌های ۶ تا ۴ کتاب درسی

مجموع جملات دنباله هندسی

۳۰- در دنباله هندسی ... ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ، مجموع هشت جمله اول، چند برابر $\sqrt{2} + 1$ است؟ (صفحه ۵- مشابه کار در کلاس)

(۱) $\frac{16}{15}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) 16

۳۱- در یک دنباله هندسی افزایشی به صورت ... ، b ، 9 ، a ، 4 ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

(صفحه ۵- مکمل کار در کلاس) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

(۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۳۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله اول کدام است؟

(صفحه ۵- مکمل کار در کلاس) و (سراسری ریاضی - ۸۸)

(۱) $10/8$ (۲) $11/2$ (۳) $12/6$ (۴) $13/4$

(صفحه ۵- مکمل کار در کلاس) و (آزمون کانون - ۹۰)

۳۳- حاصل $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ تا}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{10^{n+1} - 10}{9}$ (۲) $\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n$ (۳) $\frac{10^{n+1} - 10}{9} + n$ (۴) $\frac{10^{n-1} - 10}{9} - n$

۳۴- حاصل $A = (1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟ (صفحه ۶- مشابه تمرین ۷) و (سراسری ریاضی - ۸۲)

(۱) 507 (۲) 511 (۳) 512 (۴) 516

(صفحه ۶- نتیجه تمرین ۷)

۳۵- اگر $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8) = 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$ ، کدام است n ؟

(۱) 8 (۲) 16 (۳) 32 (۴) 64

(صفحه ۶- نتیجه تمرین ۷) و (سراسری ریاضی - ۹۳)

۳۶- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

(صفحه ۶- نتیجه تمرین ۷) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

۳۷- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۳۸- تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات فرد باشد، قدر نسبت آن

(صفحه ۵- فعالیت- نتیجه تمرین ۲-ب) و (سراسری ریاضی - ۹۴)

کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴) 3

۳۹- در یک دنباله هندسی با قدر نسبت q که تعداد جملات آن زوج است، حاصل تقسیم مجموع جملات ردیف زوج بر مجموع جملات ردیف

(صفحه ۵- فعالیت- نتیجه تمرین ۲-ب) و (آزمون کانون - ۲۱ آبان ۹۵)

فرد، همواره کدام است؟ ($q \neq 1$)

(۱) q^2 (۲) q (۳) $\frac{1}{q^2}$ (۴) $\frac{1}{q}$

۴۰- مجموع ۱۰۰ جمله اول از یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 4$ ، چند برابر مجموع جملات ردیف فرد آن ۱۰۰ جمله است؟

(صفحه ۵- فعالیت- نتیجه تمرین ۲-ب) و (آزمون کانون - ۲۰ آذر ۹۴)

(۱) 16 (۲) -3 (۳) 5 (۴) 15

۴۱- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام

(صفحه ۵- فعالیت- نتیجه تمرین ۲-ب) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

است؟

(۱) $30(\sqrt{2} + 1)$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $36(\sqrt{2} + 1)$

صفحه‌های ۶ تا ۴ کتاب درسی

رابطه‌ی بین S_{2n} و S_n

۴۲- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ است. جمله‌ی اول، چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲-ب) و (سراسری ریاضی- ۸۹)

$$\frac{81}{16} \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۴۳- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟

(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲-ب) و (سراسری ریاضی - ۸۵)

$$\frac{1}{16} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{5}{32} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

۴۴- در دنباله‌ی هندسی $\sqrt{2}, \sqrt[6]{32}, \dots$ ، مجموع شش جمله‌ی دوم چند برابر مجموع شش جمله‌ی اول است؟

(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲-ب) و (آزمون کانون ریاضی- ۹۱)

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

صفحه‌های ۶ تا ۴ کتاب درسی

مسائل کاربردی

۴۵- برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آنها نصف می‌شود.

(صفحه‌ی ۵- مشابه مثال)

حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

$$5 \quad (1) \quad 6 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

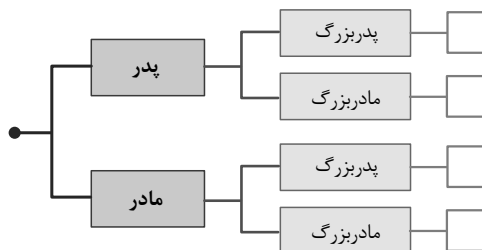
۴۶- دایره‌ای رنگ نشده مفروض است. در مرحله‌ی اول نصف آن و در مرحله‌ی بعد نصف قسمت باقی مانده و به همین ترتیب قسمت‌های باقیمانده را رنگ می‌کنیم. در پایان مرحله‌ی هفتم، در مجموع چه کسری از دایره رنگ شده است؟

(صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۶)

$$1 - \frac{1}{2^6} \quad (1) \quad 1 - \frac{1}{2^7} \quad (2) \quad \frac{1}{2^6} \quad (3) \quad \frac{1}{2^7} \quad (4)$$

۴۷- درخت شجره‌نامه‌ی خانوادگی هر فردی به شکل زیر است. مجموع تعداد اجداد یک فرد، از جد اول (پدر و مادر فرد) تا پایان جد هفتم چقدر است؟

(صفحه‌ی ۶- مشابه کار در کلاس)



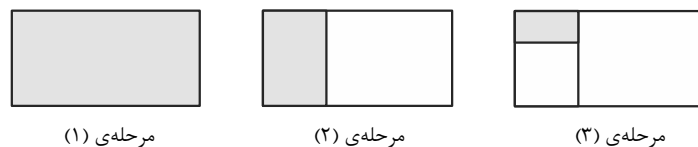
- است؟
- ۶۱۷ (۱)
۱۲۶ (۲)
۲۵۴ (۳)
۱۰۲۲ (۴)

۴۸- مستطیلی در نظر می‌گیریم که طول و عرض آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتی متر باشند در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت

طول به عرض آن باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. مجموع محیط‌های مستطیل‌ها تا مرحله‌ی

(صفحه‌ی ۶- مشابه کار در کلاس)

ششم، چند برابر محیط مستطیل اول است؟



مرحله‌ی (۱)

مرحله‌ی (۲)

مرحله‌ی (۳)

$$\frac{31}{8} \quad (1) \quad \frac{63}{32} \quad (2) \quad \frac{31}{4} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

۲. معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

صفحه‌های ۹ تا ۱۷ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

یادآوری هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)، یک معادله‌ی درجه دوم نامیده می‌شود. در سال قبل با روش‌های حل معادله‌ی درجه دوم آشنا شدید. کاربردی‌ترین آنها، روش تجزیه و استفاده از فرمول کلی حل معادله است.

ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ برابر است با:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

که در آن Δ ، مبین معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta > 0$ ، معادله دو ریشه‌ی حقیقی، $\Delta = 0$ ، معادله یک ریشه‌ی مضاعف و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: اگر یک ریشه‌ی معادله‌ی $ax^2 - 7x + 2 = 0$ برابر ۲ باشد، ریشه‌ی دیگر را بیابید.

حل: ریشه‌ی معادله همواره در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$ax^2 - 7x + 2 = 0 \xrightarrow{x'=2} 4a - 14 + 2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین معادله به شکل $3x^2 - 7x + 2 = 0$ است، برای حل آن با توجه به فرمول کلی حل معادله داریم:

$$x', x'' = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow x' = 2, x'' = \frac{1}{3}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه دومی باشند، آنگاه:

$$(x - x')(x - x'') = 0 \Rightarrow x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0 \quad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های x_1 و x_2 ، با تقسیم طرفین معادله بر $a \neq 0$ ، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

با مقایسه‌ی دو معادله‌ی هم‌ارز (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم:

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها}) \quad \quad P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصل ضرب ریشه‌ها})$$

مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 5x - 3 = 0$ را بدون حل آن بیابید.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \quad \text{و} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

حل: توجه کنید که $\Delta = (-5)^2 - 4(-3) = 37 > 0$ ، بنابراین:

تذکره (۱) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، ریشه‌های معادله $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند، با شرط $x' > x''$ ، تفاضل

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}, \quad x' > x''$$

دو ریشه برابر است با:

مثال: اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 + bx + 2 = 0$ ، دو عدد صحیح متوالی باشند، b را بیابید.

حل: ریشه‌ها را $\alpha + 1$ و α در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\alpha + 1 - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{b^2 - 8}}{1} \Rightarrow b^2 - 8 = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

تذکره (۲) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$

الف- اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد ($a + b + c = 0$)، آنگاه یک ریشه‌ی معادله ۱ و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

ب- اگر $a + c = b$ ، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (-۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

■ مثال: ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ را بیابید.

◀ حل: مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه ۱ و ریشه‌ی دیگر $\sqrt{2}$ است. $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

تذکر (۳) $ax^2 + bx + c = 0$ معادله‌ی درجه‌ی دوم

الف- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم باشد، آنگاه $\Delta > 0$ و $b = 0$. زیرا $x' = -x''$ ، پس $x' + x'' = \frac{-b}{a} = 0$ ، در نتیجه $b = 0$.

ب- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و عکس هم باشد، آنگاه $\Delta > 0$ و $a = c$. زیرا $x' = \frac{1}{x''}$ ، پس $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = 1$ ، در نتیجه $a = c$.

■ مثال: به ازای چه مقدار m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m^2 + 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه است؟

◀ حل: باید $b = 0$ و $\Delta > 0$ ، در نتیجه $m^2 - 1 = 0$ و از آنجا $m = 1$ یا $m = -1$. به ازای این مقادیر m ، در معادله خواهیم داشت:

(غ ق) ریشه‌ی حقیقی ندارد. $\Delta = 0 - 16 < 0 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$

(ق ق) $\Delta = 0 + 32 > 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = -1$

تذکر (۴) در معادله‌ای با یک مجهول، در مواردی که رابطه‌ای جبری بین دو ریشه داده شده، معمولاً با استفاده از S یا P ، یک ریشه‌ی معادله را یافته و با صدق دادن ریشه در خود معادله، مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

■ مثال: در معادله‌ی $2x^2 - 10x + a = 0$ ، یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر، یک واحد بیشتر است. a را بیابید.

◀ حل: اگر ریشه‌ها را x' و x'' بنامیم، آنگاه $x' = 2x'' + 1$ با افزودن x'' به طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$x' + x'' = 3x'' + 1 \xrightarrow{x' + x'' = \frac{10}{2} = 5} 5 = 3x'' + 1 \Rightarrow x'' = \frac{4}{3}$$

همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس با قراردادن $\frac{4}{3}$ در معادله خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 10\left(\frac{4}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{32}{9} - \frac{40}{3} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{88}{9}$$

تذکر (۵) در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، با توجه به شرایط Δ (مبین معادله)، $S = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P = \frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها)، می‌توانیم تعداد و علامت ریشه‌های معادله را بیابیم.

$$(1) \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 & \text{هر دو ریشه مثبت} \\ \frac{c}{a} > 0 & \text{دو ریشه‌ی متحدالعلامت} \\ \frac{c}{a} < 0 & \text{دو ریشه‌ی مختلفالعلامت} \end{cases}$$

$$(2) \Delta = 0 \Rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف مثبت است.} \\ \frac{-b}{a} < 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف منفی است.} \end{cases}$$

(۳) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

■ مثال: بدون حل معادله، در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید.

◀ حل: $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1) > 0$ ، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ ، پس هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. همچنین

$$\frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0 \text{، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.}$$

توجه Δ در معادله‌ی درجه دوم اگر $\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$ باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلفالعلامت است.

■ مثال: معادله‌ی $3x^2 - ax - m^2 - 1 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

◀ حل: چون $\frac{c}{a} = \frac{-m^2 - 1}{3} < 0$ ، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های حقیقی x' و x'' را می‌توان بر حسب S و P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت. که در آن $S = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب ریشه‌ها) است.

■ مثال: معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $3 - 2\sqrt{2}$ و $3 + 2\sqrt{2}$ باشند.

حل: $S = x' + x'' = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6$ و $P = x' \cdot x'' = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$

بنابراین $S = 6$ و $P = 1$ ، پس:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=6, P=1} x^2 - 6x + 1 = 0$$

■ مثال: ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (a + \sqrt{a})x + a\sqrt{a} = 0$ را بیابید.

◀ حل: در این معادله:

$$S = x' + x'' = a + \sqrt{a} \quad \text{و} \quad P = x' \cdot x'' = a\sqrt{a}$$

بنابراین ریشه‌ها $x' = a$ و $x'' = \sqrt{a}$ هستند.

■ مثال: محیط مستطیلی ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را بیابید.

◀ حل: اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x' و x'' بنامیم، بنابراین:

$$2(x' + x'') = 22 \Rightarrow x' + x'' = 11 \quad \text{و} \quad x' \cdot x'' = 28$$

معادله‌ی درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = 11$ و $P = 28$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x - 4)(x - 7) = 0 \Rightarrow x' = 7, x'' = 4$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله صفحه‌های ۹ تا ۷ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۴۹- اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3ax + 6 = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟ (صفحه ۷- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

- ۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۰- به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

(صفحه ۸- مکمل مثال) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۵)

- ۱) $-1/5$ ۲) $1/5$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۱- به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

(صفحه ۸- مکمل مثال) و (سراسری ریاضی- ۸۴)

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۵۲- به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

(صفحه ۸- مکمل مثال) و (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۴)

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۵۳- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - \left(\frac{1}{a^4} + a^2\right)x + \frac{1}{a^2} = 0$ حاصل $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ کدام است؟ (صفحه ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (آزاد غیرپزشکی- ۸۱)

- ۱) $a^8 + \frac{1}{a^8}$ ۲) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ ۳) $a^4 + \frac{1}{a^4}$ ۴) $a^6 + \frac{1}{a^6}$

۵۴- اگر $a + 3b + 9c = 0$ ، آن‌گاه یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ همواره کدام است؟

(صفحه ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (آزمون کانون- ۲۲ آبان ۹۴)

- ۱) $\frac{-b}{3a}$ ۲) $\frac{c}{3a}$ ۳) $\frac{3c}{a}$ ۴) $\frac{-3b}{a}$

۵۵- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{4\beta}{\beta^2 + 1}$ کدام است؟

(صفحه ۷- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲) و (آزمون کانون- ۲۴ مهر ۹۴)

- ۱) $\frac{4}{7}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{1}{7}$

۵۶- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به

صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟ (صفحه‌ی ۹- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲) و (سراسری ریاضی - ۹۰)

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۵۷- در معادله‌ی $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش تر باشد، m کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

۵۸- به ازای کدام مقدار k در معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌ها رابطه‌ی $3 = x_1 + 2x_2$ برقرار است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (سراسری تجربی - ۷۹)

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۵۹- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است، مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

۶۰- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x - 8 = 0$ ، اگر یکی از جواب‌ها نصف مربع جواب دیگر باشد، m کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۲ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴) -۲

۶۱- در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (سراسری ریاضی - ۸۷)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۶۲- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۱-ب) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۶۳- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

(صفحه‌ی ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (سراسری تجربی - ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

۶۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

(صفحه‌ی ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۵- به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{4} = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

(صفحه‌ی ۷- متن درس) و (سراسری تجربی - ۸۱)

- (۱) $a > 2$ یا $a < 2$ (۲) $a > 4$ یا $a < 3$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) $3 < a < 4$

۶۶- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $(m+1)x^2 + m(m^2-9)x - 2 = 0$ ، دو ریشه‌ی قرینه‌ی حقیقی دارد؟

(صفحه‌ی ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (آزاد ریاضی - ۷۵)

- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۹

۶۷- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

(صفحه‌ی ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۳) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۸- اگر a و c دو عدد گویای مخالف صفر و مبین معادله‌ی $ax^2 - 2\sqrt{2}x + c = 0$ صفر باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله:

(صفحه ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۱ و ۳) و (آزمون کانون ریاضی- ۸۸)

- (۱) گویا هستند. (۲) گنگ هستند. (۳) صحیح هستند. (۴) طبیعی هستند.

۶۹- معادله‌ی $(x-1)(x-3) + 2 + k^2 = 0$ چه وضعی دارد؟

- (۱) دو ریشه‌ی مثبت دارد. (۲) دو ریشه‌ی منفی دارد. (۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۷۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + 2x + 2 - 3a = 0$ باشند، به ازای چه حدودی از a ، نقطه‌ی $M(\alpha, \beta)$ در ناحیه‌های دوم یا چهارم

(صفحه ۸- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۱ و ۳)

قرار دارد؟

- (۱) $0 < a < \frac{2}{3}$ (۲) $a > \frac{2}{3}$ یا $a < 0$ (۳) $\frac{-2}{3} < a < 0$ (۴) $\frac{-2}{3} < a$

صفحه‌ی ۹ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

تشکیل معادله‌ی درجه دوم

۷۱- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $5 - 2\sqrt{3}$ و $5 + 2\sqrt{3}$ است برابر است با:

(صفحه ۹- مشابه کار در کلاس)

- (۱) $x^2 + 10x + 13 = 0$ (۲) $x^2 - 10x + 13 = 0$ (۳) $x^2 + 10x - 13 = 0$ (۴) $x^2 - 10x - 13 = 0$

(صفحه ۹- مشابه کار در کلاس) و (سراسری انسانی- ۹۱)

۷۲- جواب‌های کدام معادله‌ی زیر به صورت $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ است؟

- (۱) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ (۳) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 2x + 1 = 0$

۷۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ و $\alpha > \beta$ ، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش 5α و 4β باشد کدام است؟

(صفحه ۹- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲) و (آزمون کانون ریاضی- ۸۷)

- (۱) $x^2 - 15x + 9 = 0$ (۲) $x^2 + 7x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 7x + 10 = 0$ (۴) $x^2 + 15x + 9 = 0$

صفحه‌ی ۹ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

مسائل کاربردی

۷۴- فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت و یکسان است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲

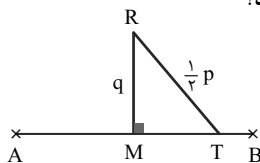
(صفحه ۱۶- مشابه تمرین ۸) و (سراسری تجربی- ۷۵)

باشد، مساحت قالی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

(صفحه ۹- مکمل مثال)

۷۵- در شکل زیر، $AM = MB = \frac{1}{4}p$ ، آنگاه AT و TB ریشه‌های کدام معادله‌اند؟



- (۱) $x^2 - px + q^2 = 0$ (۲) $x^2 - 2px + q = 0$ (۳) $x^2 - 2px + q^2 = 0$ (۴) $x^2 - px + 2q^2 = 0$

(صفحه ۱۶- مشابه تمرین ۹)

۷۶- شکل زیر مقطع عرضی از یک قطعه‌ی فلزی به مساحت ۳۲۰ سانتی‌متر مربع است، x کدام است؟



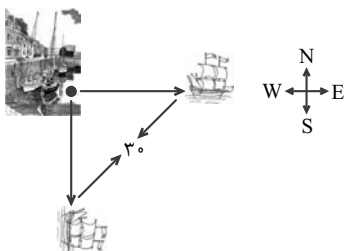
- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۷۷- دو کشتی در یک زمان از یک لنگرگاه حرکت می‌کنند، یکی از کشتی‌ها به سمت شرق و دیگری به سمت جنوب حرکت می‌کند. کشتی

مشرقی، ۳ کیلومتر در ساعت سریعتر از کشتی جنوبی حرکت می‌کند. بعد از ۲ ساعت، فاصله‌ی بین دو کشتی ۳۰ کیلومتر است، سرعت

(صفحه ۱۶- مرتبط با تمرین ۹)

کشتی جنوبی برابر با چند کیلومتر بر ساعت است؟

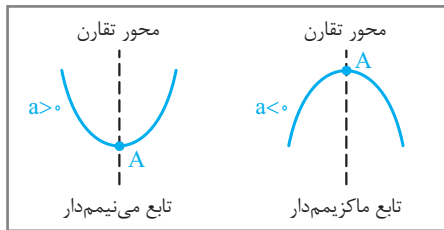


- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۲. معادلات درجه دوم

صفرهای تابع

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی



یادآوری از سهمی: هر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ (با شرط $a \neq 0$) را یک تابع درجه‌ی دوم یا سهمی می‌نامیم. نمودار هر سهمی به یکی از دو شکل مقابل است، نقطه‌ی A را رأس سهمی (نقطه‌ی ماکزیم یا می‌نیم تابع) می‌نامیم.

محور تقارن: خطی عمود بر محور x ها که از رأس سهمی می‌گذرد، محور تقارن تابع نامیده می‌شود. معادله‌ی محور تقارن تابع $x = -\frac{b}{2a}$ است.

نقاط ماکزیم یا می‌نیم: اگر $a > 0$ باشد، سهمی می‌نیم‌دار و رو به بالاست و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ کم‌ترین مقدار خود را می‌پذیرد.

اگر $a < 0$ باشد، سهمی ماکزیم‌دار و رو به پایین است و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ بیشترین مقدار خود را می‌پذیرد.

تذکره در جدول زیر، دو شکل کلی ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم، نقاط ماکزیم (می‌نیم) و محور تقارن تابع نمایش داده شده است.

ضابطه	محور تقارن	نقطه‌ی ماکزیم (می‌نیم)	مثال
$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$x = h$	$A(h, k)$	$f(x) = -3(x-1)^2 + 2 \Rightarrow$ <ul style="list-style-type: none"> محور تقارن: $x = 1$ ماکزیم: $A(1, 2)$ ($a < 0$)
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$x = -\frac{b}{2a}$	$A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ <ul style="list-style-type: none"> محور تقارن: $x = -\frac{-4}{2(2)} = 1$ می‌نیم: $A(1, -1)$ ($a > 0$) در ضابطه $x=1 \rightarrow y = 2 - 4 + 1 = -1 \Rightarrow A(1, -1)$

مثال: اگر تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ ماکزیمی به عرض ۷ در ناحیه‌ی دوم داشته باشد، b را بیابید.

حل: نقطه‌ی ماکزیم تابع در ناحیه‌ی دوم است، پس طول نقطه‌ی ماکزیم، منفی است، یعنی $x = -\frac{b}{-2} < 0$ ، پس $b < 0$. از طرفی عرض

$$\frac{-\Delta}{4a} = 7 \Rightarrow -\frac{b^2 + 12}{4(-1)} = 7 \Rightarrow b^2 + 12 = 28 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b < 0} b = -4$$

نقطه‌ی ماکزیم ۷ است، پس:

صفرهای تابع

صفرهای تابع: در تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر این نقاط، ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ هستند.

صفرهای تابع درجه‌ی دوم: صفرهای تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند، بسته به اینکه $\Delta > 0$ ، $\Delta = 0$ یا $\Delta < 0$ باشد، تابع درجه‌ی دوم، محور x ها را به ترتیب در دو نقطه، یک نقطه قطع می‌کند یا اصلاً قطع نمی‌کند.

مثال: صفرهای تابع $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ را بیابید.

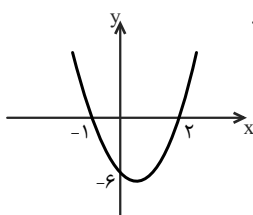
حل: باید ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 5x + 2 = 0$ را پیدا کنیم. از آنجایی که $a + c = b$ ، پس یک ریشه‌ی معادله $x' = -1$ و ریشه‌ی دیگر

$$x'' = -\frac{2}{3}$$

است. بنابراین صفرهای معادله برابر -1 و $-\frac{2}{3}$ هستند.

نکته: اگر نمودار تابع درجه‌ی دوم، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم به شکل

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ است. در این حالت مقدار ماکزیم (می‌نیم) تابع به ازای } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ به دست می‌آید.}$$



مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل زیر رسم شده است. a ، b و c را بیابید.

حل: محل‌های تلاقی تابع با محور x ها به طول‌های ۲ و -1 هستند، بنابراین ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = a(x-2)(x+1)$ در نظر بگیریم. از طرفی عرض از مبدأ تابع -6 است، یعنی

$$f(0) = a(0-2)(0+1) = -6 \Rightarrow a = 3$$

در نتیجه: $f(0) = -6$

$$f(x) = 3(x-2)(x+1) \text{ یا } f(x) = 3x^2 - 3x - 6 \text{ پس } a = 3, b = -3, c = -6.$$

تعیین وضعیت تابع درجه دوم با محور x ها ◀ جدول زیر وضعیت نمودار تابع درجه‌ی دوم را با توجه به شرایط Δ و a (ضریب x^2) با محور x ها نمایش می‌دهد.

(۱) $\Delta > 0$	(۲) $\Delta = 0$	(۳) $\Delta < 0$
نمودار محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند	نمودار بر محور x ها مماس است.	نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند.

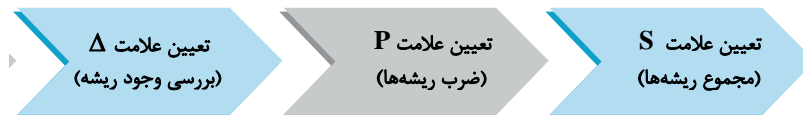
مثال: به ازای چه حدودی از a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + 2x + a$ همواره بالای محور x هاست؟

حل: برای آنکه تابع همواره بالای محور x ها باشد، باید $a > 0$ (ضریب x^2) و $\Delta < 0$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{ضریب } x^2 > 0 & (1) \\ \Delta = 4 - 4a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1 & (2) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $a > 1$ ، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a است.

تعیین علامت صفرهای تابع با استفاده از Δ ، S و P ◀ در تابع درجه دو با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با استفاده از Δ ، S و P می‌توان علامت ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را یافت، به الگوریتم زیر توجه کنید:



مثال: به طریقه‌ی یافتن علامت صفرهای تابع‌های زیر توجه کنید.

(۱) $f(x) = x^2 - 6x + 4$

$\Delta = 36 - 4(4)(1) > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$P = \frac{c}{a} = 4 > 0$ دو ریشه هم‌علامتند.

$S = -\frac{b}{a} = 6 > 0$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

(۲) $f(x) = 4x^2 - 3x - 2$

$\Delta = 9 - 4(4)(-2) > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{4} < 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند.

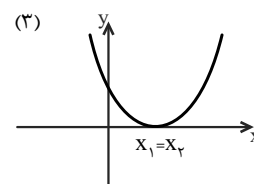
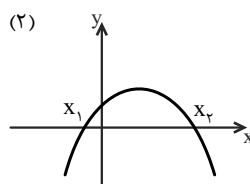
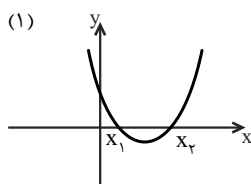
به لحاظ قدرمطلق ریشه‌ی مثبت بزرگتر است. $S = -\frac{b}{a} = \frac{-3}{4} > 0$

رابطه‌ی بین نمودار تابع و ضرایب معادله ◀ اگر نمودار تابع در اختیار باشد، می‌توانیم علامت ضرایب معادله را بیابیم، هم‌چنین با تعیین ضرایب معادله و علامت آنها، می‌توانیم تعیین کنیم که تابع درجه‌ی دوم از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می‌کند. در این حالت برای تعیین علامت ضرایب معمولاً به خواص زیر توجه می‌کنیم:

(الف) ماکزیمم و می‌نیمم: علامت a را مشخص می‌کند. (ب) عرض از مبدأ تابع: علامت $c (= f(0))$ را می‌دهد.

(پ) طول رأس: $x = -\frac{b}{2a}$ ، به تعیین علامت a و b کمک می‌کند. (ت) Δ ی معادله: وضعیت تقاطع تابع با محور x ها مشخص می‌کند.

مثال: در هر یک از شکل‌های زیر، سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. در مورد علامت ضرایب a ، b و c نظر دهید.



حل: (۱) تابع می‌نیم‌دار است، $a > 0$. از طرفی با توجه به شکل؛ عرض از مبدأ مثبت است، یعنی $f(0) = c > 0$ ، در نتیجه $c > 0$ ، همچنین طول رأس منحنی مثبت است، بنابراین $x_S = -\frac{b}{2a}$ ، از آنجایی که $a > 0$ باید $-b > 0$ یا $b < 0$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow a > 0, b < 0, c > 0$$

(۲) تابع ماکزیم‌دار است، پس $a < 0$. از طرفی عرض از مبدأ تابع مثبت است، بنابراین $f(0) = c > 0$ ، طول رأس سهمی نیز مثبت است،

$$-\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \Rightarrow a < 0, b > 0, c > 0 \quad \text{پس در نتیجه:}$$

(۳) تابع می‌نیم‌دار است، پس $a > 0$. از طرفی عرض از مبدأ تابع مثبت است، پس $f(0) = c > 0$ ، همچنین طول رأس منحنی، مثبت است،

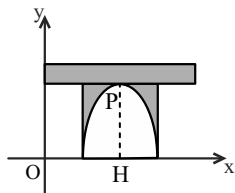
$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} -b > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow a > 0, b < 0, c > 0 \quad \text{بنابراین در نتیجه:}$$

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

ماکزیم‌وم می‌نیم‌دار تابع درجه دوم

۷۸- مطابق شکل، معادله منحنی طاقی به صورت $y = -x^2 + 6x - 5$ است. طول ارتفاع طاق (PH) کدام است؟

(صفحه ۱۶ - مشابه تمرین ۷) و (سراسری ریاضی - ۷۴)



(۱) ۳

(۲) ۳/۵

(۳) ۴

(۴) ۴/۵

۷۹- اگر بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (K+3)x^2 - 4x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

(صفحه ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) و (سراسری ریاضی - ۸۳)

(۴) ۴

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۴

۸۰- به ازای کدام مقدار a نقطه‌ی می‌نیم نمودار تابع با ضابطه $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط $y = 1$ واقع است؟

(صفحه ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) و (سراسری ریاضی - ۷۷)

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) -۱

۸۱- خط به معادله $y = -\frac{5}{4}x$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

(صفحه ۱۶ - مرتبط با تمرین ۷) و (سراسری تجربی - ۷۴)

(۴) ۲

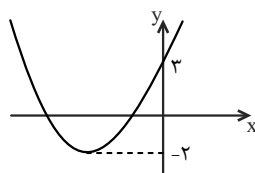
(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

۸۲- در تابع درجه دوم $P(x) = \frac{5}{4}x^2 + bx + c$ که مربوط به شکل زیر است مقدار $\frac{c}{b}$ کدام است؟

(صفحه ۱۵ - مشابه تمرین ۲)



(۱) ۰/۸

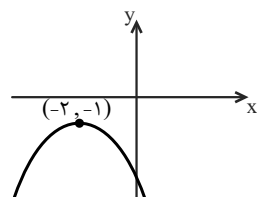
(۲) ۰/۸

(۳) ۰/۶

(۴) -۰/۶

۸۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با شرط $|a| = 1$ به شکل زیر است. این نمودار محور y را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(صفحه ۱۶ - مشابه تمرین ۷)



(۱) -۵

(۲) -۴

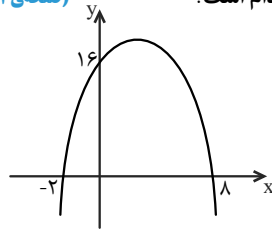
(۳) -۳

(۴) -۶

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ و تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

صفحه‌های تابع درجه دوم

۸۴- اگر نمودار تابع درجه‌ی دومی به صورت مقابل باشد، مجموع ضرایب این تابع کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۱- مشابه مثال) و (آزمون کانون ریاضی- ۹۱)



- ۱۹ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۲۱ (۳)
- ۲۲ (۴)

۸۵- اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- و نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را در نقطه‌ای به طول ۱- و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، b کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۱- مشابه مثال)

- $\frac{7}{2}$ (۴)
- $\frac{7}{6}$ (۳)
- $\frac{7}{3}$ (۲)
- $\frac{7}{2}$ (۱)

۸۶- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟ (صفحه‌ی ۱۰- مشابه فعالیت) و (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

- ۳ (۴)
- ۲ (۳)
- ۱/۵ (۲)
- ۱ (۱)

۸۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -3x^2 + 1$ را طوری انتقال می‌دهیم که رأس آن بر نقطه‌ی $(6, -1)$ منطبق شود، ریشه‌ی منفی تابع جدید کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مکمل تمرین ۲)

- $-2 + \sqrt{3}$ (۴)
- $-2 - \sqrt{3}$ (۳)
- $-1 - \sqrt{3}$ (۲)
- $-1 - \sqrt{2}$ (۱)

۸۸- رأس سهمی به معادله‌ی $y = -x^2 + 6x$ و نقاط تلاقی این سهمی با محور x ها، سه رأس یک مثلث‌اند، مساحت این مثلث کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۵- مرتبط با تمرین ۲)

- ۲۶ (۴)
- ۲۷ (۳)
- ۲۸ (۲)
- ۳۰ (۱)

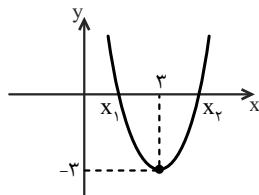
۸۹- سهمی $y = x^2 - 6x + 10$ ، نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع می‌کند. $x_1^2 + x_2^2$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- مکمل کار در کلاس)

- ۳۴ (۴)
- ۳۲ (۳)
- ۲۹ (۲)
- ۲۳ (۱)

۹۰- اگر سهمی $f(x) = x^2 + bx + c$ ، محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های قرینه قطع کند و عرض از مبدأ آن ۲ باشد، $f(1)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۵- مشابه تمرین ۲)

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۱ (۲)
- ۲ (۱)

۹۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با شرط $|a| = 1$ به شکل زیر است. $x_1 + 2x_2$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۶- مشابه تمرین ۷)



- $3 + \sqrt{3}$ (۱)
- $9 - \sqrt{3}$ (۲)
- $3 - \sqrt{3}$ (۳)
- $9 + \sqrt{3}$ (۴)

۹۲- رأس سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + mx - \frac{1}{4}$ ، روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم مختصات واقع است. اگر این سهمی محور x ها را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره خط AB کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- مکمل فعالیت) و (آزمون کانون- ۲۰ آذر ۹۴)

- $\frac{1}{2}$ (۴)
- ۱ (۳)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)
- $\sqrt{2}$ (۱)

۹۳- در یک تابع درجه‌ی دوم رأس سهمی به مختصات $(-7, 3)$ است و سهمی محور x ها را در دو نقطه یکی به طول مثبت و دیگری به طول منفی قطع می‌کند، اگر معادله‌ی سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، آنگاه از میان a ، b و c ، کدام یک باید مثبت باشند؟ (صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲)

- فقط a (۱)
- فقط b (۲)
- فقط c (۳)
- a و b (۴)

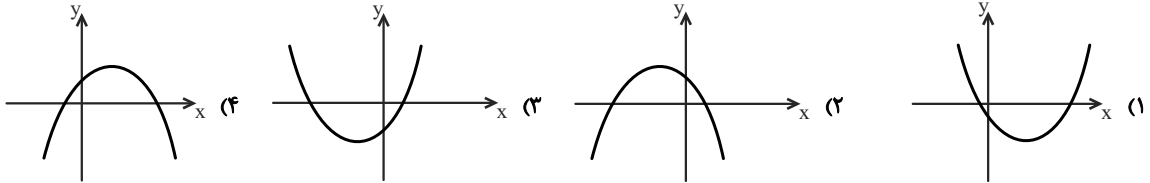
۹۴- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = (a-4)x^2 + 3x + a - 3$ از هر چهار ناحیه‌ی مختصات می‌گذرد؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲)

- (۱) $a > 3$ (۲) $a < 4$ (۳) $3 < a < 4$ (۴) $a < 0$

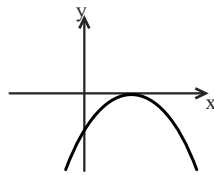
۹۵- شکل‌های زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند. در کدام‌یک از آنها $a > 0$ و $b > 0$ است؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)



۹۶- شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx - 1$ است. کدام دوتایی برای (a, b) قابل قبول است؟

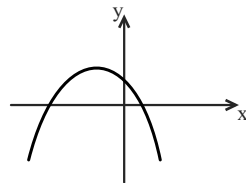
(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)



- (۱) $(1, -2)$
(۲) $(-2, -1)$
(۳) $(-1, 4)$
(۴) $(-1, 2)$

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

۹۷- شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه‌ی زیر همواره درست است؟



- (۱) $a + b > 0$
(۲) $a + b < 0$
(۳) $b + c > 0$
(۴) $b + c < 0$

۹۸- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲) و (سراسری ریاضی - ۸۹)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۹۹- اگر رأس تابع درجه‌ی دومی در ناحیه‌ی چهارم باشد و نمودار آن از مبدأ مختصات عبور کند، آنگاه این تابع از کدام ناحیه یا نواحی عبور نمی‌کند؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

- (۱) دوم و سوم (۲) دوم (۳) سوم (۴) اول و دوم

۱۰۰- تابع $y = (m-1)x^2 + x + m - 2$ دارای می‌نیم بوده و نمودار آن محور عرض‌ها را در پایین محور طول‌ها قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲) و (آزمون کانون ریاضی - ۸۸)

- (۱) $m > 1$ (۲) $0 < m < 1$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $m > 2$

۱۰۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲) و (سراسری ریاضی - ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

۱۰۲- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x هاست؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲) و (سراسری ریاضی - ۸۵)

- (۱) $m < -\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4} < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{3}{4}$ (۴) $m > \frac{3}{4}$

۱۰۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

(صفحه ۱۲- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$